**BAB 6. APLIKASI INTEGRAL**

**Menghitung Luas Daerah**

Seperti sudah diuraikan pada bagian sebelumnya, pengertian jumlah rieman secara geometri dari



merupakan luas daerah yang dibatas oleh kurva, sumbu *x*, garis *x* = *a* dan garis *x* = *b*, seperti di ilustrasikan pada gambar dibawah ini.

*f* (*x*)

*x*

*x*=*a*

*x*=*b*

*y*

Luas daerah yang diarsir = 

Untuk letak daerah dibawah sumbu *x*

*f* (*x*)

*x*

*x*=*a*

*x*=*b*

*y*

Luas daerah yang diarsir = -

***Contoh***

Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva *f*(*x*) = 2*x* + 1, sumbu *x*, garis *x* = 1dan garis *x* = 3.

1

2

*x*

*y*

*y* = 2*x* + 1

*Penyelesaian*





= 10 satuan luas

***Contoh***

Hitunglah luas daerah yang dibatasi kurva *f* (*x*) = *x* - 1, sumbu x, garis *x* = -2 dan garis *x* = 3.

*Penyelesaian*



A1

*y* = *x* -1

*x*

-2

3

*y*

1

2

A2











luas total = 4 ½ + 2 = 6 ½ satuan luas

**Luas yang dibatasi 2 kurva**

*f* (*x*)

*x*

*x*=*a*

*x*=*b*

*y*

*g* (*x*)

Luas daerah yang diarsir = 

*y*

*f* (*y*)

*x*

*y*=*a*

*y*=*b*

*g* (*y*)

Luas daerah yang diarsir = 

***Contoh***

Hitunglah luas daerah yang dibatasi dua buah kurva masing-masing *f*(*x*) = *x*2 dan *g*(*x*) = 4*x* – *x*2

*Penyelesaian*

Tentukan titik potong kedua kurva:

*x*2 = 4*x* - *x*2 ⇔ *x*2 - 2*x* = 0

x

y

*f* (*x*) = *x*2

*g* (*x*) = 4*x*- *x*2

2

0

⇔ *x* (*x* - 2) = 0

⇔ *x* = 0 atau *x* = 2













***Contoh***

Tentukanlah luas daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva *y*2 = 5*x* dan 5*x* - 3*y* - 4 = 0

*Penyelesaian*

Mencari batas bawah dan batas integral dengan metode substitusi:

5*x* - 3*y* - 4 = 0

*y*2 - 3*y* -4 = 0

(*y* + 1)(*y* - 4) = 0

*y*1 = -1 atau *y*2 = 4

 ⇒ 

 ⇒ 

-1

4

*y*

*x*

*y*2 *=* 5*x*

5*x* - 3*y* - 4 = 0

Luas daerah yang diarsir = 

= 

= 

= 

**Latihan**

1. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi

a. *y* = 4*x* -1, sumbu x, garis *x* = 2, garis *x* = 4

b. *y* = 2*x* +6, sumbu x, garis *x*=1, garis *x* = 2

c. *y* = 3*x* -10, sumbu x, garis *x*=2, garis *x* = 5

d. *y* = -5*x* + 3, sumbu *y*, garis *y* = -1, garis *y* = 2

e. *y* = -3*x* + 4, sumbu y, garis *y*=-2, garis *y* = 0

f. *y* = *x*2, sumbu *x*, garis *x* = 0, garis *x* = 2

g. *y* = *x*2-3*x* + 2, sumbu *x*, garis *x* = 0, garis *x* = 5

h. *y* = 2*x*2-4*x* + 4, sumbu *x*, garis *x* = 0, garis *x* = 3

i. *y* = 3 + 4*x* -*x* 2, sumbu y, garis *y* = 0, garis *y* = 6

j. *y* = 6 + 2*x* - 2*x*2, sumbu *y*, garis *y* = 1, garis *y* = 5

2. Tentukanlah luas daerah yang dibatasi

a. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 2*x* + 3

b. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 3*x* + 4

c. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 4*x* + 5

d. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 5*x* + 6

e. kurva *y* = -*x*2 + 6 dan kurva *y* = *x*

f. kurva *y* = -*x*2 + 2*x*+8 dan kurva *y* = -4*x* + 3

g. kurva *y* = -*x*2 + 2 dan kurva *y* = -*x*

h. kurva *y* = -*x*2 + 3 dan kurva *y* = -2*x*

i. kurva *y* = -*x*2 + 4 dan kurva *y* = -3*x*

j. kurva *y* = -*x*2 + 4 dan kurva *y* = *x*2 – 4

**Menghitung Volume Benda Pejal**

Konsep integral dapat juga digunakan untuk menghitung volume benda bejal. Ada dua metode yaitu metode cincin dan metode kulit.

**Metode Cincin : Sumbu x sebagai sumbu putar**

Perhatikan kurva fungsi berikut ini

d*x*

*f* (*x*)

x

y

*a*

*b*

*x*i

*x*i-1

*w*i

*f* (*wi*)

Partisi diatas berbentuk persegi panjang dengan ukuran

panjang = *x*i - *x*i-1= d*x*

lebar = *f*(*w*i)

Apabila persegi panjang tersebut di putar 3600 dengan sumbu putar sumbu x, maka akan menghasilkan bangun selinder seperti gambarkan dibawah ini.

Volume potongan selinder tersebut:

= luas alas x tinggi

= luas lingkaran x tinggi

= 

= 

= 

*x*i-*x*i-1

f(wi)

x

Pendekatan volumenya dengan batas *x*=*a* sampai *x*=*b*, maka





untuk mendapatkan volume *exact*nya, maka ||P||→0,







untuk kasus daerah yang dibatasi dua kurva, misal fungsi *f*(*x*) dan *g*(*x*):

`

*f* (*x*)

x

*x*=*a*

*x*=*b*

y

*g* (*x*)

d*x*

Volume daerah yang diarsir setelah diputar sejauh 3600 terhadap sumbu x:



**Metode Cincin : Sumbu y sebagai sumbu putar**

Perhatikanlah fungsi f(*y*) berikut ini.

f (y)

x

*y*=*a*

*y*=*b*

y

d*y*

Apabila luas daerah yang diarsir diputar 360o terhadap sumbu *f* (*y*), maka volume benda yang terjadi adalah



Untuk kasus dengan daerah yang dibatasi dua buah kurva, missal *f* (*y*) dan *g* (*y*), sumbu y dijadikan sumbu putar seperti digambarkan dibawah ini,

d*y*

*f* (*y*)

x

*y*=*a*

*y*=*b*

y

*g* (*y*)

maka volume benda yang terjadi adalah



**Metode Kulit Tabung**

Perhatikanlah gambar kulit tabung berikut ini

Jari-jari lapisan terluar : r2

Jari-jari lapisan terdalam : r1

Volume kulit tabung:







h

r1

r2

Apabila *r*1= *x*i-1, *r*2 = *x*i, *h* = *f*(*w*i), Δ*r* = Δ*x* dan



Maka *V* = 2 π *w*i *f* (*w*i) Δ*x*

Untuk volume seluruh tabung sama dengan jumlah volume kulit-kulitnya.



Persamaan volume diatas dapat didekati dengan konsep integral apabila ||P||→0, sehingga





Untuk kasus daerah yang dibatasi 2 kurva misal *f*(*x*) dan g(*x*) dimana *f*(*x*) > g(*x*) dan sumbu *y* sebagai sumbu putar:



Untuk kasus diketahui fungsi *f*(*y*) dan sumbu *x* sebagai sumbu putar maka volum yang terjadi



Untuk kasus daerah yang dibatasi 2 kurva misal *f*(*y*) dan g(*y*) dimana *f*(*y*) > g(*y*) dan sumbu *x* sebagai sumbu putar:



***Contoh***

Tentukan volume benda putar yang dibentuk apabila fungsi  diputar mengelilingi sumbu x dengan batas bawah *x* = 0 dan batas atas *x* = 3. (gunakan metode cincin dan metode kulit)

*Penyelesaian*

Metode Cincin:

*dV* = πr2*dx*





x

y



3

0

d*x*









Metode Kulit:

x

y



3

0

d***y***













***Contoh***

Tentukan volume benda putar yang dibentuk apabila fungsi  , garis *x* = 2 dan sumbu *x* diputar mengelilingi sumbu y sejauh 3600.

*Penyelesaian*

Metode Cincin





2

x

y



2

0

d*y*

4





Metode Kulit:

2

x

y



2

0

d*x*

4









***Contoh***

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva *y*= *x*2 dan *y* = 2*x* diputar mengelilingi sumbu x sejauh 3600.

*Penyelesaian*

Titik potong antara *y* = *x*2 dan *y* = 2*x* adalah (0,0) dan (2, 4).

Metode Cincin

x

2

y

y = 2*x*

0

4

d*x*

y = *x*2















Metode Kulit



x

2

y

*y* = 2*x*

0

4

d*y*

y = *x*2













**Kasus dengan sumbu putar sembarang**

Contoh

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi *y*=2*x* ,sumbu *x*, *x*=0, *x*=2 diputar 3600 terhadap garis *x* = 4.

*Penyelesaian*

x

*x*=4

2

y

*y* = 2*x*

0

4

d*y*

*x*

4-*x*

*y* = 2*x* *x* = ½ *y*

batas bawah: *y* = 0, batas atas: *y* = 2*x* = 2⋅2 = 4

Metode Cincin













***Contoh***

Tentukan volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi *y* = *x*2 , garis *y* =-2, *x*=0, *x*=2 diputar 3600 terhadap garis *y* = -2.

*Penyelesaian*

x

*y* =-2

4

y

*y* = *x*2

0

16

d*x*

batas bawah: *x* = 0, batas atas *x* = 4

Metode Cincin











**Latihan**

1. Tentukanlah volume benda putar yang terjadi,apabila daerah yang dibatasi

a. *y* = 2*x*, sumbu *x* dan *x* = 2 diputar terhadap sumbu x

b. *y* = 3*x* - 2, sumbu *x*, *x* = 0, garis *x* = 4 diputar terhadap sumbu x

c. *y* = *x*2, sumbu *x*, *x* = 0, garis *x* = 2 diputar terhadap sumbu x

d. *y* = *x*2 - 3, sumbu *x*, *x* = 1, garis *x* = 3 diputar terhadap sumbu x

e. *y* = 4*x*3 , sumbu *x*, *x* = 0, garis *x* = -2 diputar terhadap sumbu x

f. *y* = 3*x*, sumbu y, *y* = 0, *y* = 2 diputar terhadap sumbu y

g. *y* = -2*x* +1, sumbu *y*, *y* = 1, *y* = 4 diputar terhadap sumbu y

h. *y* = *x*2, sumbu y, *y* = 0, garis *y* = 2 diputar terhadap sumbu y

i. *y* = *x*2 - 3, sumbu y, *y* = 1, garis *y* = 3 diputar terhadap sumbu y

j. *y* = 4*x*3 , sumbu y, *y* = 0, garis *y* = 8 diputar terhadap sumbu y.

2. Tentukanlah volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi

a. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 2*x* + 3 diputar terhadap sumbu x

b. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 3*x* + 4 diputar terhadap sumbu y

c. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 4*x* + 5 diputar terhadap sumbu x

d. kurva *y* = *x*2 dan kurva *y* = 5*x* + 6 diputar terhadap sumbu y

e. kurva *y* = -*x*2 + 6 dan kurva *y* = *x* diputar terhadap sumbu x

f. kurva *y* = -*x*2 + 2*x*+8 dan kurva *y* = -4*x* + 3 diputar terhadap sumbu y

g. kurva *y* = -*x*2 + 2 dan kurva *y* = -*x* diputar terhadap sumbu x

h. kurva *y* = -*x*2 + 3 dan kurva *y* = -2*x* diputar terhadap sumbu y

i. kurva *y* = -*x*2 + 4 dan kurva *y* = -3*x* diputar terhadap sumbu x

j. kurva *y* = -*x*2 + 4 dan kurva *y* = *x*2 - 4 diputar terhadap sumbu y

3. Tentukanlah volume benda putar yang terjadi apabila daerah yang dibatasi

a. kurva *y* = *x* , sumbu x, garis *x* = 0, garis *x* = 2 diputar terhadap garis *x*=4

b. kurva *y* = *x* , sumbu x, garis *x* = 0, garis *x* = 4 diputar terhadap garis *x*=6

c. kurva *y* = *x* , sumbu x, garis *x* = 2, garis *x* = 4 diputar terhadap garis *x*=8

d. kurva *y* = *x*2 , sumbu x,garis *x* = 0, garis *x* = 2 diputar terhadap garis *x* = 3

e. kurva *y* = *x*2 , sumbu x,garis *x* = 1, garis *x* = 2 diputar terhadap garis *x* = 4

f. kurva *y* = *x*2 , sumbu x, garis *x*=0, garis *x* = 2 diputar terhadap garis *x* = -1

g. kurva *y* = *x* - 1 , sumbu x, garis *x*=1, garis *x* = 3 diputar terhadap garis y = -2

h. kurva *y* = *x* - 1 , sumbu x, garis *x*=2, garis *x* = 5 diputar terhadap garis y = -1

i. kurva *y*2 = *x* , sumbu x, garis *x* = 0, garis *x* = 3 diputar terhadap garis y = 5

j. kurva *y* = 2*x*2 , sumbu x, garis *x* = 0, garis *x* = 2 diputar terhadap garis y = -3

**Menghitung Panjang Kurva**

Pada bagian ini, akan dibahas penerapan integral untuk menghitung panjang suatu kurva yang dinyatakan dalam persamaan parametrik , *x* = *f* (*t*) dan *y* = *g* (*t*). Perhatikan kurva berikut ini.

x

y

So

Sn

Si

Si-1

Si+1

a

b

Kurva diatas dibagi-bagi oleh titik-titik So, S2, S3, …, Sn.

Ambil dua titik, misalkan Si dan Si-1. Panjang segmen kurva antara kedua titik tersebut, dapat dihampiri dengan panjang garis lurus menggunakan teorema phytagoras, seperti digambarkan dibawah ini.

Si

Si-1

Δ*x*i

Δ*y*i

Δ*r*i





dengan menggunakan teorema nilai rata-rata



maka akan diperoleh







apabila Δ*t* mendaekati nol maka *dr*i = *ds*i, sehingga



panjang kurva seluruhnya:



atau



atau



Apabila persamaan kurvanya dinyatakan fungsi *y* = *f* (*x*), maka



Apabila persamaan kurvanya dinyatakan fungsi *x* = *g* (*y*), maka



***Contoh***

Hitunglah panjang kurva *x* = *t*3, *y* = *t*2 untuk 0 ≤ *t* ≤ 2

*Penyelesaian*

 







***Contoh***

Hitunglah panjang ruas garis yang menghubungkan titik(1,3) dan titik (4,9)

*Penyelesaian*

Persamaan garis yang menghubungkan titik (1,3) dan (4,9) : *y* = 2*x* + 1





Silahkan cocokan jawaban ini dengan menggunakan dalil Phytagoras.

***Contoh***

Hitunglah panjang kurva *y*= 2/3*x*3/2 dari titik (0,0) hingga titik (3, 9)

*Penyelesaian*





**Latihan**

1. Hitunglah panjang dua titik berikut dengan menggunakan konsep integral

a. (1,4) dan (5,7)

b. (-3,-2) dan (1,2)

c. (-2,5) dan (4,-3)

d. (-4,6) dan (4,-2)

2. Hitunglah panjang kurva berikut ini:

a.  untuk 0 ≤ *t* ≤ π

b.  untuk 0 ≤ *t* ≤ 2π

c.  untuk 0 ≤ *t* ≤ 2π

d.  untuk 0 ≤ *t* ≤ 2π

e.  untuk 0 ≤ *t* ≤ π

f.  untuk 0 ≤ *t* ≤ 2

g.  untuk 0 ≤ *t* ≤ 4

h.  untuk 0 ≤ *t* ≤ 3

i.  untuk 0 ≤ *y* ≤ 9

j.  untuk 0 ≤ *x* ≤ ½